محاضرة رياضة ١٤

~~Ex~~

$\boxed{\text{Ex}}$

Find Laurents of ~~the regions~~

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$ on the regions:-

a) $0 < |z| < 1$ c) $|z| > 2$

b) $0 \leqslant |z-1| < 1$

Sol

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \longrightarrow A = 1,\ B = 1$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots \qquad |u| < 1$$

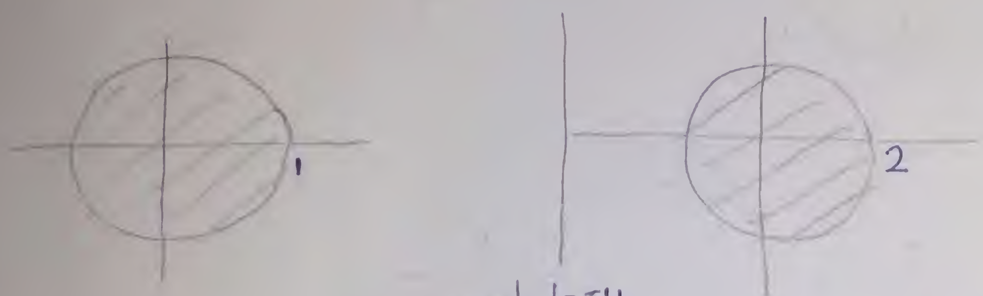
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 \cdots \qquad |u| < 1$$

a) $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$|z| < 1$ and $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$

$|z| < 1$ and $|z| < 2$



التقاطع

The region $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} \cdots\right]$$

b) $0 \leq |z-1| < 1$

← لتجهيز المسألة نجعل بدلاً من كل $z \leftarrow z-1$ قبل الحل.

وإذا تواجد قوس داخله $(z-1)$ يترك كما هو.

$$f(z) = \frac{-1}{\underline{z-1}} + \frac{1}{\underline{(z-1)-1}}$$

جاهزة ← ← نحاول تجهيزها

$$= \frac{-1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}$$

شرط الفك

$$0 \leq |z-1| < 1$$

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - \left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 \cdots\right]$$

---

c) $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2}$$

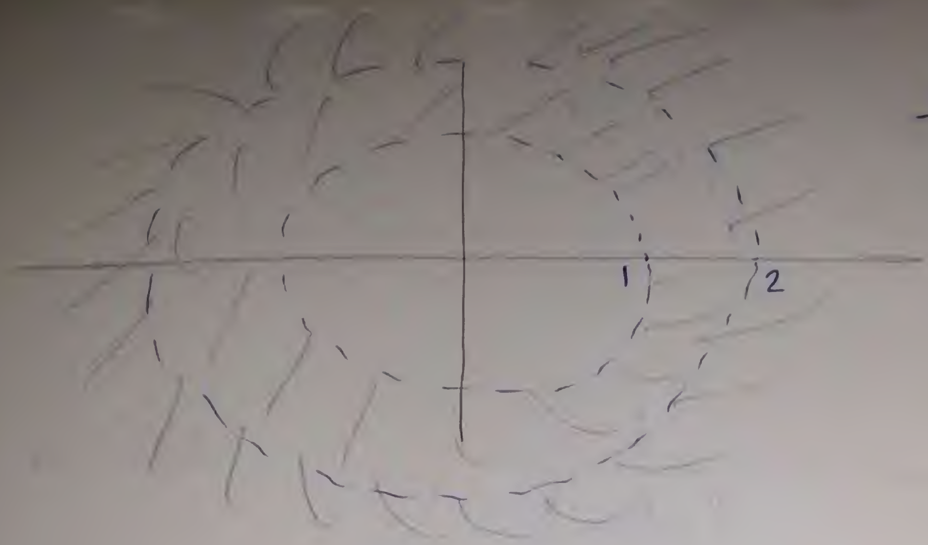
$$= \frac{-1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) + \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)$$

لأن المقياس أكبر من رقم فأخذ القوس مشترك.

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow 1 < |z|$$

$$\left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Rightarrow 2 < |z|$$

التقاطع



The region is $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{-1}{z}\left[1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots\right] + \frac{1}{z}\left[1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots\right]$$

- إذا كان المطلوب $b < |z| < a$ في التجهيز

١- القوس الذى به b نأخذ منه ال z مشترك .

٢- " " " a فأخذ منه ال a مشترك .

Zero's and singularity of $f(z)$

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(f)}$$

- أصفار الدالة هى قيم z التى تجعل البسط = صفر ولا تجعل المقام = صفر .

- رتبة الأصفار هي أعلى أس لقوس $(z-a)$ داخله يمكن أخذ مشترك من البسط حيث a هي أحد أصفار الدالة.

- singularity :- هي جميع قيم z التي تجعل الدالة ∞ أي تجعل المقام صفر.

- نلاحظ أنه موضوع أن تأخذ الدالة ∞ له ثلاثة إحتمالات:

أولاً :- أنه الدالة عند القيمة صفر للمقام ولكن لا تجعل الدالة ما لا نهاية وهذا يستوجب أن يكون صفر المقام يجعل البسط صفر.

<u>ثانياً</u> :- أن يكون عند الفك عدد قليل من المفكوك له أسس سالبة (جزء قليل في المفكوك يعطى ∞ والباقي لا يعطى)

<u>ثالثاً</u> :- أن يكون عند الفك عدد لا نهائي من الحدود ذات أسس سالبة.

Type of singularity

1. Removable.
2. Poles
3. Essentially

$\boxed{1}$ Removable

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$ $\boxed{1}$

$\boxed{2}$ صفر المقام يجعل البسط صفر لذلك يكون

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \neq \infty$$

حيث z_0 هى قيمة z التى تجعل المقام صفر.

لأنها فى المفكوك لا تحتوى على أسس سالبة $\Rightarrow \oint_c f(z)\, dz = 0$ $\rightarrow$

$\boxed{2}$ Poles

$\boxed{\equiv}$ له صورتان إما قوس $(z - z_0)$ فى المقام أو قوس $(z - z_0)^{n+1}$ فى المقام.

$\boxed{1}$ $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z - z_0)}$ "simple pole"

$$\operatorname*{Res}_{z \Rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1}$$

$$\oint_c f(z)\, dz = 2\pi i \sum \underline{\operatorname*{Res}_{z \Rightarrow z_0}} f(z)$$

Residual

$\boxed{2}$ $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ "Pole of order $n+1$ "

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^n}{dz^n} (z-z_0)^{n+1} f(z)$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z=z_0} \operatorname{Res} f(z)$$

← الحدود التي أسسها سالبة عددها محدود.

$\boxed{3}$ Essentially

[١] دوال تأخذ ∞ عند Z_0 وعند فكها عدد الحدود التي بها أسس سالبة لانهائي.

مثل ⇐ $\sin\frac{1}{z}$ ، $\cos\frac{1}{z}$ ، $e^{\frac{1}{z}}$ ، $\cosh\left(\frac{1}{z-a}\right)$ ...

← لابد من الفك بـ Laurents واستخدام

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

Example

Evaluate

$\boxed{1}$ $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\,dz$

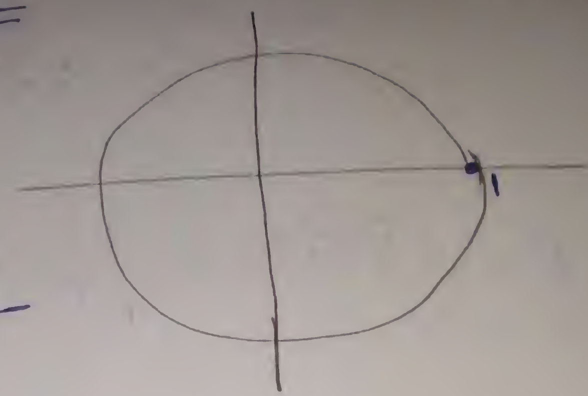
② $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)^2}\,dz$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2 \frac{1}{e^{z-1}}\,dz$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\oint_{|z|=10} \frac{\sinh\frac{1}{z}}{z-5}\,dz$

الحل

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

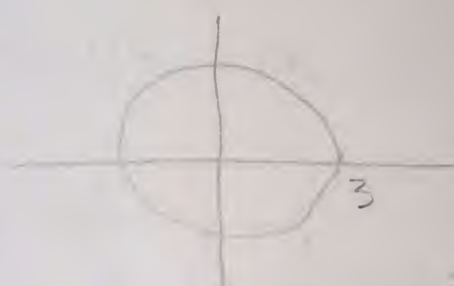


← أصفار المقام عند $z=0$ تقع داخل المنطقة ، صفر المقام يجعل البسط = صفر.

$$\therefore \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq \infty \Rightarrow I = 0$$

---

② $$f(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)^2}$$



← أصفار المقام عند

$z=1 \longrightarrow$ is simple pole

$z=2 \longrightarrow$ is pole of order 2.

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1) \frac{z^2+1}{(\cancel{z-1})(z-2)^2} = \boxed{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz} (\cancel{z-2})^2 \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{(z-1)(2z) - (z^2+1)(1)}{(z-1)^2} = \frac{4-5}{1} = -1$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)^2}\, dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

$$= 2\pi i \left[2 + (-1) \right]$$

$$= 2\pi i$$

ـــ عند ما ترى دالة مثلثية أو أسية أو زائدية الزاوية فيها مجهول لازم تفك القوس (laurents) تجعل القيمة التي تجعل الدالة ∞ هي نقطة الفك.

$\boxed{3}$ $f(z) = z^2 \, e^{\frac{1}{(z-1)}}$

$e^{\infty} \longrightarrow \infty$

$e^{-\infty} \longrightarrow 0$

$z = 1$ is singular point of $f(z)$

ـــ نفك الدالة بدلالة قوى $(z-1)$

لأن هذه النقطة التي تجعل الدالة ∞.

$$e^{\text{أي حاجة}} = 1 + \frac{(\text{أي حاجة})}{1!} + \frac{(\text{أي حاجة})^2}{2!} \cdots$$

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2 + \cdots$$

$$z^2 = [(z-1)+1]^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-1}} = [(z-1)^2 + 2(z-1) + 1]\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \cdots\right]$$

a_1 هو معامل القوس الذى أسه = -1 .

$$a_1 = \left[1 + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!}\right] = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

$$I = 2\pi i \left(\frac{13}{6}\right)$$

$\boxed{10}$ Lec 14